

11.1. Установка, стоящая на краю вертикального обрыва, запускает в море маленький мячик со скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтальной плоскости. Мячик упал в море под углом $\beta = 60^\circ$ к горизонтальной плоскости. Определите высоту обрыва H над уровнем моря, расстояние L по горизонтали от обрыва до точки падения, скорость мяча v_k при падении, время t полета шарика. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

Решение.

Векторный метод

Пусть мячик исходно летит вверх. Рассмотрим векторный треугольник скоростей, где вектор ускорения свободного падения направлен вертикально вниз.

$$\vec{v}_k = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Для радиус-вектора (начало отсчета связем с установкой):

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \text{ или } \frac{\vec{r}}{t} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2}.$$

Вектор \vec{r}/t является медианой векторного треугольника скоростей, а его проекция на горизонтальное направление L/t – высотой треугольника. Углы треугольника равны $\alpha + \beta$, $90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$.

Проекция скоростей на горизонтальную прямую (высоту треугольника):

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta; \quad (1)$$

$$\text{Отсюда } v_k = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = v_0 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ м/с.} \quad (2)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv_k^2}{2}. \quad (3)$$

$$H = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - 1 \right) = \frac{v_0^2}{g} \approx 10 \text{ м.} \quad (4)$$

Из теоремы синусов:

$$\frac{gt}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{v_0}{\sin(90^\circ - \beta)}. \quad (5)$$

Отсюда

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = \frac{10 \text{ м/с}}{10 \text{ м/с}^2} \frac{\sin 90^\circ}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ секунды.} \quad (6)$$

Найдем площадь треугольника:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{t} \cdot gt = \frac{1}{2} v_0 v_k \sin(\alpha + \beta). \quad (7)$$

Отсюда

$$L = \frac{v_0 v_k \sin(\alpha + \beta)}{g} = \frac{v_0^2}{g} \frac{\cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = 17,3 \text{ метров} \quad (8)$$

Если мячик исходно летит вниз, что во всех формулах угол α надо заменить на угол $-\alpha$:

$$v_k = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = v_0 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ м/с.} \quad (26)$$

$$H = \frac{v_0^2}{g} \approx 10 \text{ м.} \quad (46)$$

$$t = \frac{v_0 \sin(-\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = \frac{10 \text{ м/с}}{10 \text{ м/с}^2} \frac{\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1 \text{ секунда.} \quad (66)$$

$$L = \frac{v_0 v_k \sin(-\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \cdot \sin(-\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = 8,6 \text{ метров} \quad (86)$$

Примечание: школьник может заметить, что при полете вверх $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. векторный треугольник скоростей является прямоугольным, и решать этот частный случай.

Примечание: по усмотрению жюри полный балл ставится, даже если рассмотрен только 1 вариант (вверх или вниз).

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записаны формулы для векторного треугольника скоростей, или сделан рисунок треугольника	2
2	Записана формула $v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta$	1
3	Получена формула для конечной скорости v_k	0,5
4	Получено числовое значение $v_k \approx 17,3 \text{ м/с.}$	0,5
5	Записан закон сохранения механической энергии	1
6	Получена формула для высоты обрыва H	0,5
7	Получено числовое значение для высоты обрыва $H \approx 10 \text{ м.}$	0,5
8	Записана теорема синусов	1
9	Получена формула для времени полета t	0,5
10	Получено числовые значение для времени полета $t \approx 2 \text{ с и } 1 \text{ с}$ (полный балл за любой вариант)	0,5
11	Записаны формулы для площади векторного треугольника	1
12	Получена формула для расстояния L	0,5
13	Получено числовые значение для расстояния $L \approx 17,3 \text{ м и } 8,6 \text{ м}$ (полный балл за любой вариант)	0,5
	Сумма	10

Координатный метод

При полете шарика его горизонтальная компонента скорости не меняется:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta; \quad (1)$$

$$\text{Отсюда } v_k = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = v_0 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ м/с.} \quad (2)$$

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv_k^2}{2}. \quad (3)$$

$$H = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} - 1 \right) = \frac{v_0^2}{g} \approx 10 \text{ м.} \quad (4)$$

Рассмотрим время подъема шарика как время уменьшения вертикальной компоненты начальной скорости до 0:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (5)$$

а время падения – как время увеличения вертикальной компоненты от 0 до v_{ky} :

$$t_2 = \frac{v_{ky}}{g} = \frac{v_k \sin \beta}{g}. \quad (6)$$

Общее время полета:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{v_k \sin \beta}{g} = \frac{v_0}{g} \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \sin \beta \right) = \frac{v_0}{g} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (7)$$

Подставим значения:

$$t = \frac{10 \text{ м} / \text{с}}{10 \text{ м} / \text{с}^2} \frac{\sin 90^\circ}{\cos 60^\circ} = 2 \text{ секунды.}$$

Расстояние L по горизонтали от обрыва до точки падения:

$$L = v_{0x} t = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g} = 17,3 \text{ м.} \quad (8)$$

Если мячик исходно летит вниз, что во всех формулах угол α надо заменить на угол $-\alpha$:

$$v_k = v_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = v_0 \sqrt{3} \approx 17,3 \text{ м/с.} \quad (26)$$

$$H = \frac{v_0^2}{g} \approx 10 \text{ м.} \quad (46)$$

$$t = \frac{v_0 \sin(-\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = \frac{10 \text{ м} / \text{с}}{10 \text{ м} / \text{с}^2} \frac{\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1 \text{ секунда.} \quad (76)$$

$$L = \frac{v_0 v_k \sin(-\alpha + \beta)}{g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \cdot \sin(-\alpha + \beta)}{g \cos \beta} = 8,6 \text{ метров} \quad (86)$$

Примечание: по усмотрению жюри полный балл ставится, даже если рассмотрен только 1 вариант (вверх или вниз).

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Есть идея решения, схема движения шарика	1
2	Записана формула $v_0 \cos \alpha = v_k \cos \beta$	1
3	Получена формула для конечной скорости v_k	0,5
4	Получено числовое значение $v_k \approx 17,3 \text{ м/с.}$	0,5
5	Записан закон сохранения механической энергии	1
6	Получена формула для высоты обрыва H	0,5
7	Получено числовое значение для высоты обрыва $H \approx 10 \text{ м.}$	0,5

8	Найдено время подъема шарика	1
9	Найдено время падения шарика	1
10	Получена формула для времени полета t	0,5
11	Получено числовые значение для времени полета $t \approx 2$ с и 1 с (полный балл за любой вариант)	0,5
12	Записаны формулы для равномерного движения по горизонтали	1
13	Получена формула для расстояния L	0,5
14	Получено числовые значение для расстояния $L \approx 17,3$ м и 8,6 м (полный балл за любой вариант)	0,5
	Сумма	10